« Ils ont changé la définition de la vitesse ! »

Le statut du vecteur vitesse dans les programmes…

Quelles cohérences ?

Que dire aux élèves ?

Olivier Chaumette

Jacques Vince

Que disent les programmes ?

LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Notions abordées au collège (cycle 4)

Vitesse (direction, sens, valeur), mouvements uniformes, rectilignes, circulaires, relativité des mouvements, interactions, forces, expression scalaire de la loi de gravitation universelle, force de pesanteur.

Assumer qu'on n'aura pas accès au vecteur vitesse

Vecteur déplacement d'un point. Vecteur vitesse moyenne d'un point. Vecteur vitesse d'un point. Mouvement rectiligne.	Définir le vecteur vitesse moyenne d'un point. Approcher le vecteur vitesse d'un point à l'aide du vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$, où M et M' sont les positions successives à des instants voisins séparés de Δt ; le représenter. Caractériser un mouvement rectiligne uniforme ou non uniforme. *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie d'un système en mouvement et représenter des vecteurs vitesse ; décrire la variation du vecteur vitesse.* **Capacité numérique :** représenter des vecteurs vitesse d'un système modélisé par un point lors d'un mouvement à l'aide d'un langage de programmation. **Capacités mathématiques :** représenter des vecteurs. Utiliser des grandeurs algébriques.

Le représenter approché… dans un 1er temps

Pas de problème de direction: problème réglé en seconde !

Pas de précision rectiligne ici…

Que disent les programmes ?

LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

En première

On ne cherche pas à induire, à justifier, mais à utiliser…

3. Mouvement d'un système	
Vecteur variation de vitesse. Lien entre la variation du vecteur vitesse d'un système modélisé par un point matériel entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées sur celui-ci. Rôle de la masse.	Utiliser la relation approchée entre la variation du vecteur vitesse d'un système modélisé par un point matériel entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées sur celui-ci : - pour en déduire une estimation de la variation de vitesse entre deux instants voisins, les forces appliquées au système étant connues ; - pour en déduire une estimation des forces appliquées au système, le comportement cinématique étant connu. *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie d'un système modélisé par un point matériel en mouvement pour construire les vecteurs variation de vitesse. Tester la relation approchée entre la variation du vecteur vitesse entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées au système.* **Capacité numérique :** Utiliser un langage de programmation pour étudier la relation approchée entre la variation du vecteur vitesse d'un système modélisé par un point matériel entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées sur celui-ci. **Capacité mathématique** : Sommer et soustraire des vecteurs.

M et M' ne sont plus mentionnés

On assume encore l'estimation. Notions "d'instants voisins" à discuter…

Que disent les programmes ?

LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

En terminale

1. Décrire un mouvement	
Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point.	Définir le vecteur vitesse comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps et le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. Établir les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération à partir des coordonnées du vecteur position et/ou du vecteur vitesse.
Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire.	Citer et exploiter les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet, dans le cas d'un mouvement circulaire.
Mouvement rectiligne uniformément accéléré. Mouvement circulaire uniforme.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré, circulaire, circulaire uniforme. *Réaliser et/ou exploiter une vidéo ou une chronophotographie pour déterminer les coordonnées du vecteur position en fonction du temps et en déduire les coordonnées approchées ou les représentations des vecteurs vitesse et accélération.* **Capacité numérique :** Représenter, à l'aide d'un langage de programmation, des vecteurs accélération d'un point lors d'un mouvement. **Capacité mathématique :** Dériver une fonction.

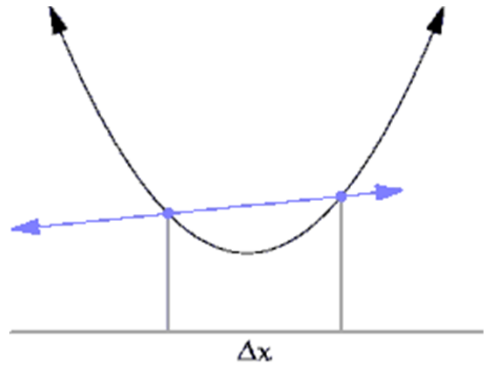
Avant, que faisions-nous ?

En traçant $\frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{2\Delta t}$, tracions-nous le vecteur vitesse instantanée ?

→NON, c'était un vecteur vitesse moyenne

→ Et ce vecteur n'est *a priori* pas tangent à la trajectoire
(sauf si $\Delta t \rightarrow 0$ ou cas particuliers de mouvements…).

Seul le vecteur limite : $\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{2\Delta t} \right)$ (la dérivée) sera tangent.



Pourquoi avoir changé la formulation ?

« Approcher le vecteur vitesse d'un point à l'aide du vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$, où M et M' sont les positions successives à des instants voisins séparés de Δt ; le représenter. »

Avantages :

- On donne du sens au lien entre vecteur vitesse et vecteur déplacement
- On fait sentir que la vitesse instantanée n'est atteignable que si les deux points tendent l'un vers l'autre
- On prépare la dérivée (par exemple à une dimension)

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right)$$

en lien avec les maths: $$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} t_{x_0}(h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pourquoi avoir changé la formulation ?

« Approcher le vecteur vitesse d'un point à l'aide du vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$, où M et M' sont les positions successives à des instants voisins séparés de Δt ; le représenter. »

Inconvénient :

numériquement la méthode des points voisins (c'est-à-dire approcher la vitesse à t_i par : $\frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i-\Delta t)}{2\Delta t}$) est préférable car **elle donne de meilleurs résultats**.

Justification :

- $x(t_i+\Delta t) = x(t_i) + \frac{dx}{dt}(t_i)\,\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}(t_i)\,(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}(t_i)\,(\Delta t)^3 + o((\Delta t)^3)$
- $x(t_i-\Delta t) = x(t_i) - \frac{dx}{dt}(t_i)\,\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}(t_i)\,(\Delta t)^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}(t_i)\,(\Delta t)^3 + o((\Delta t)^3)$

Méthode M_iM_{i+1} :

$\frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}(t_i)(\Delta t) + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}(t_i)\,(\Delta t)^2 + o\left((\Delta t)^2\right)$ ordre 1

Méthode « centrée » :

$\frac{x(t_i+\Delta t)-x(t_i-\Delta t)}{2\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_i) + \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}(t_i)\,(\Delta t)^2 + o\left((\Delta t)^2\right)$ approximation d'ordre 2

donc plus "proche" de la dérivée

Que sont des instants voisins ?

Pour l'enseignant !...

Pour le savoir, il faut regarder le développement limité et pouvoir négliger le second ordre devant le premier :

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \frac{dx}{dt}(t_i)\,\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}(t_i)\,(\Delta t)^2 + o(\Delta t^2)$$

On arrive au critère suivant :

$$\Delta t \ll \left|\frac{dx}{dt}(t_i) / \frac{d^2x}{dt^2}(t_i)\right|$$

→ pendant Δt, il ne faut pas que l'accélération soit trop grande…

Autre façon d'écrire ce critère :

$$\left|v(t_i) / \frac{dv}{dt}(t_i)\right| \gg \Delta t \text{ ou encore } \left|\frac{\Delta v}{v}\right| \ll 1$$

→ pendant Δt, la variation relative de vitesse doit être faible…

Concrètement…

Vecteur vitesse d'un point (inatteignable)

Approché par

$$\vec{v} \approx \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

- N'est pas tout à fait tangent (pas grave pour un mouvement rectiligne, seul à priori au programme en seconde)
- L'approximation est d'autant meilleure que M est proche de M'

L'approximation sera encore meilleure si on tient compte de ce qui se passe avant et après le point.
Donc si on a accès seulement à quelques positions (vidéo, chronophotographie, enregistrement) <u>ET qu'on veut améliorer l'approximation…</u>

$$\vec{v} \approx \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{2\Delta t}$$

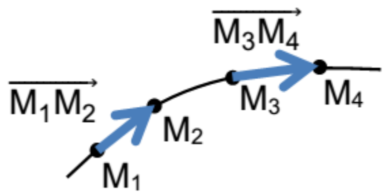
Méthode de la *dérivée numérique centrée*…
Mais toujours pas de signe =

MAIS PAS EN SECONDE

Un exemple…

4. Vecteur déplacement d'un point

Le vecteur déplacement entre deux positions M_1 et M_2 du point étudié est le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.



5. Vecteur vitesse moyenne d'un point

Rappel : la vitesse moyenne du point entre les deux positions M_1 et M_2 est égale à la distance M_1M_2 divisée par la durée Δt mise par le point pour aller de M_1 à M_2 : $v_{1-2} = \frac{M_1M_2}{\Delta t}$.

Le vecteur vitesse moyenne d'un point entre deux positions M_1 et M_2 est le rapport du vecteur déplacement par la durée Δt mise par le point pour aller de M_1 à M_2 : $\overrightarrow{v_{1-2}} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$.

Il a les caractéristiques suivantes :

- direction : celle du vecteur déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$.
- sens : celui du mouvement ;
- norme : $\frac{M_1M_2}{\Delta t}$, valeur de la vitesse moyenne entre M_1 et M_2. Elle s'exprime en $m \cdot s^{-1}$ (ou m/s).

Le vecteur vitesse moyenne $\overrightarrow{v_{1-2}}$ est généralement représenté à partir du point M_1.

6. Vecteur vitesse d'un point

Si la durée Δt mise pour aller de M_1 à M_2 est suffisamment petite, on peut considérer que le vecteur vitesse du point à la position M_1 est approximativement le vecteur vitesse moyenne entre M_1 et M_2 :

$$\overrightarrow{v_1} \approx \overrightarrow{v_{1-2}} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}.$$

Plus les points M1 et M2 sont proches, meilleure est l'approximation.
Ce vecteur vitesse indique la direction, le sens et la valeur de la vitesse lorsque le point est à la position M_1.

7. Type de mouvements et vecteur vitesse

Les mouvements étudiés au collège peuvent être caractérisés par l'évolution ou la non évolution des caractéristiques du vecteur vitesse :

	Caractéristique du vecteur vitesse	
Mouvements :	Sa direction…	Sa norme…
Rectiligne	…reste la même	
Curviligne (non rectiligne)	…change tout le temps	
Uniforme		…est constante
Non uniforme		…varie
Circulaire uniforme	…change tout le temps	…est constante
…		

PÉGASE

Puis en première…

La dérivée est construite en math

Taux de variation et nombre dérivé gagnent à être illustrés dans des contextes variés :

- en géométrie, ils représentent la pente d'une sécante et la pente d'une tangente ;
- en cinématique, on peut interpréter un taux de variation comme une vitesse moyenne et un nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;

Extrait BO maths

- Scalairement, on peut assumer le passage à la limite $\mathrm{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{MM\prime}{\Delta t}$
- Et la direction tangente de la vitesse instantanée

Puis en première...

Inévitablement approché car discrétisé

$$m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \approx \sum \vec{F}$$

($\Delta\vec{v}$ et $\sum\vec{F}$
colinéaires
même sens)

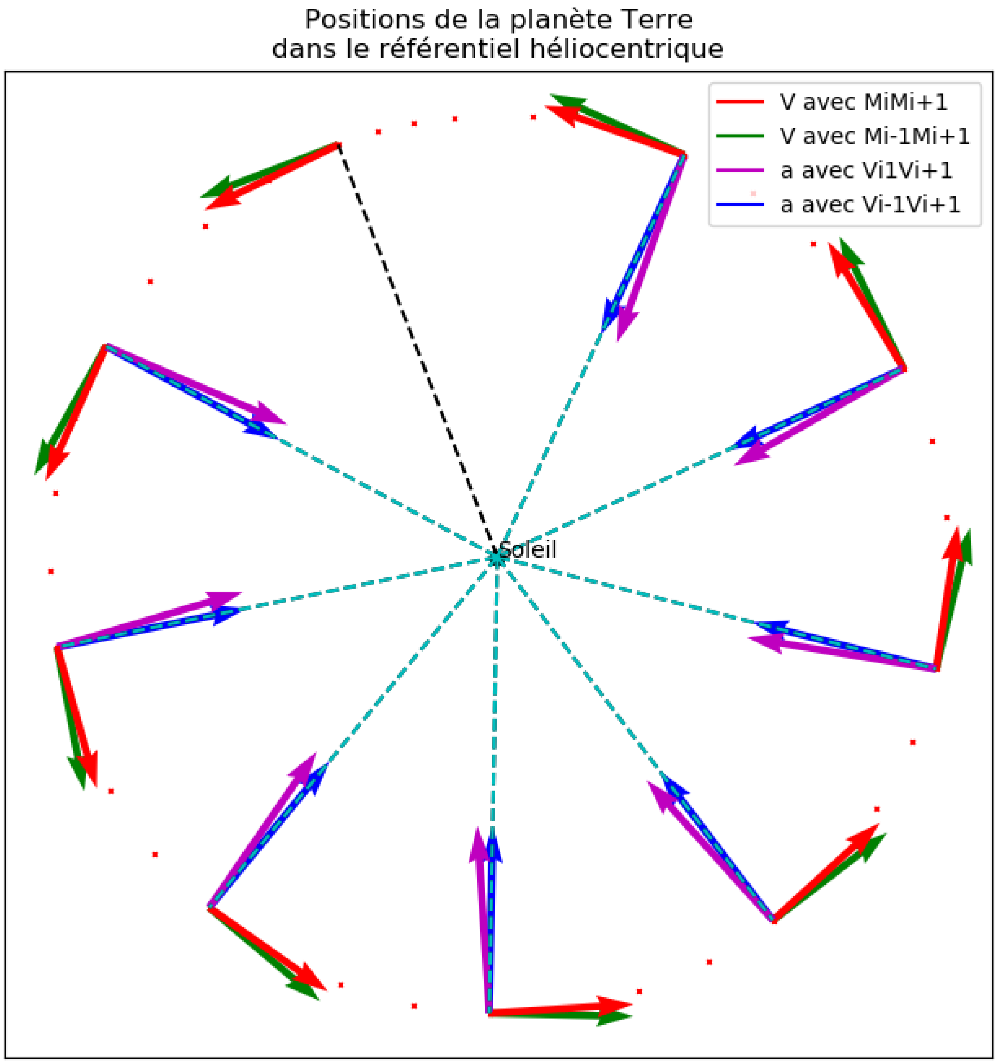
Donné.
Non à induire.
<u>À utiliser (et discuter)</u>

On montre que l'approximation est meilleure si on tient compte de ce qui se passe avant et après le point considéré.

Méthode "centrée" justifiée et adoptée

Et en terminale ?

Il faudra avoir adopté la méthode centrée !



En résumé…

EN COURS

En seconde

$$\vec{v}(M_i) \approx \frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{\Delta t} \quad (moyenne\ si\ \Delta t\ petit)$$

Colinéaire au déplacement (+ même sens)

$$v_x(t) \approx v_{x\ moyenne\ si\ \Delta t\ petit}$$

$$v_x(t) \approx \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)$$

En première

$$\vec{v}(M_i) \approx \frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{\Delta t}$$ (idem pour $\Delta\vec{v}$)

Ou passage à la limite pour $\vec{v}(M_i)$

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)$$

En terminale

$$\vec{v}(M_i) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{\Delta t}\right)$$

Tangent à la trajectoire (+ même sens)

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

En résumé…

En pratique pour des points expérimentaux discrets

En seconde

$\vec{v}(M_i) \approx \frac{\overrightarrow{M_i M_{i+1}}}{\Delta t}$ et $v_x(t) \approx \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ (essentiellement mouvements rectilignes)

Méthode centrée *éventuellement* dans des cas non rectilignes

En première

On montre, une fois la notion de dérivée acquise, que

$v_x(t) \approx \frac{x(t+\Delta t)-x(t-\Delta t)}{2\Delta t}$ donne de meilleurs résultats* donc on l'adopte pour approximer la vitesse instantanée sur des points discrets.

En terminale

Méthode centrée, adoptée depuis la 1ère

** On ne montre pas en TP la relation entre $\overrightarrow{\Delta V}$ et $\sum \vec{F}$, on ne fait que l'utiliser (justement pour justifier l'utilisation de la dérivée numérique centrée, pour évaluer ΔV etc…)*

Mais surtout… Ne pas passer à côté de l'essentiel…