EXERCICE 3 : Autour des paraboles

Partie 1

1. Soit J et K deux points distincts du plan,

   - Tracer l'ensemble noté E_1 des points M du plan équidistants de J et K.
   - Hachurer l'ensemble noté E_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité : $JM < KM$.

Aucune justification n'est demandée.

2. Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites du plan sécantes en O,

   - Tracer l'ensemble noté F_1 des points M du plan équidistants des droites (Δ_1) et (Δ_2).
   - Hachurer l'ensemble noté F_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité :
     $d(M, \Delta_1) < d(M, \Delta_2)$ ($d(M,D)$ désignant la distance du point M à la droite D).

3. Soit une droite (Δ) et un point I n'appartenant pas à (Δ). Construire trois points distincts du plan équidistants de I et (Δ). Laisser les traits de construction

Partie 2

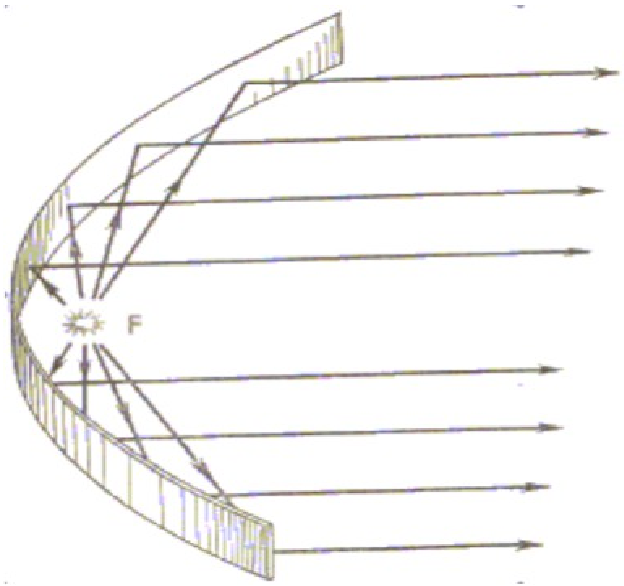
On considère désormais une droite (Δ) et un point I n'appartenant pas à (Δ). On munit le plan d'un repère orthonormé tel que le point I ait pour coordonnées $(0,1)$ et la droite (Δ) admette $y = -1$ pour équation dans ce repère.

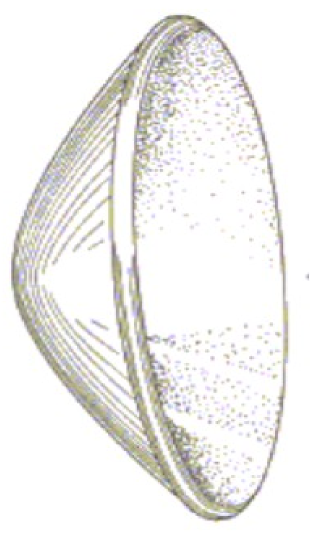
1.
   a) Construire le repère sur la figure.
   b) Déterminer l'ordonnée du point M d'abscisse 1 équidistant de I et (Δ).
   c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le point $M(x,y)$ du plan soit équidistant du point I et de la droite (Δ).

2. Tracer l'ensemble noté G_1 des points M du plan équidistants de I et (Δ).
3. Hachurer l'ensemble noté G_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité : $d(M, \Delta) < IM$.

Partie 3

On se propose d'étudier une propriété géométrique de la parabole qui explique son utilisation dans certaines antennes dites «paraboliques». Dans cette partie, on étudie les ondes reçues et réfléchies par une antenne parabolique. On admet ici que la section plane de cette antenne est une parabole, et ces ondes sont assimilées à des rayons qui arrivent parallèlement à l'axe de symétrie de la parabole.

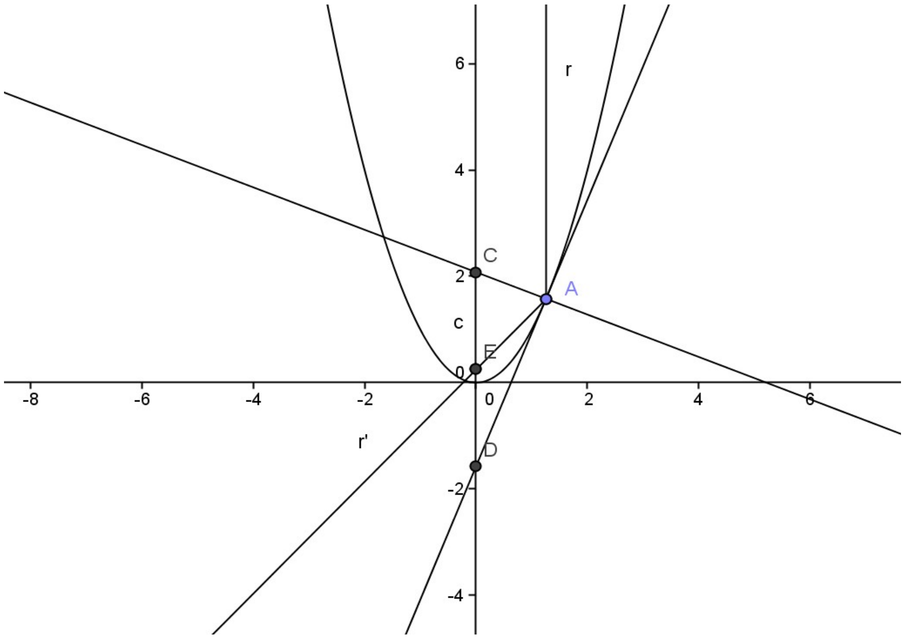




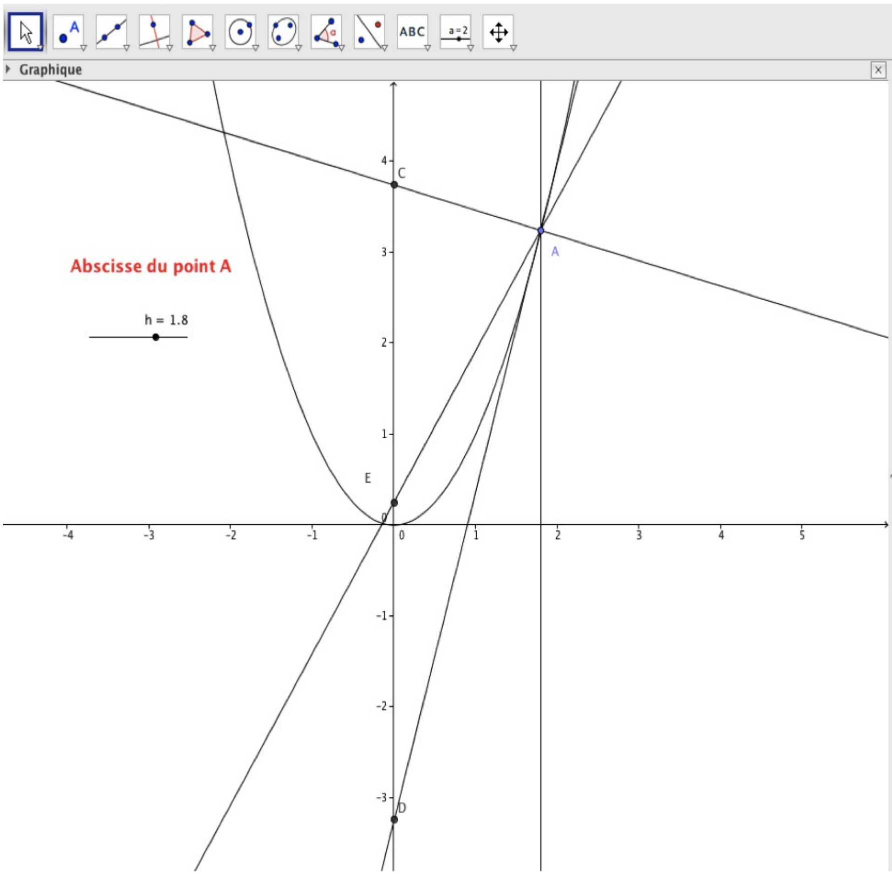
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, on considère la parabole *(P)* d'équation $y = x^2$.

Soit A un point de (P), distinct de l'origine O du repère.

- La demi-droite r d'origine A et parallèle à l'axe des ordonnées représente le rayon lumineux incident en A (A est appelé point d'incidence).
- La droite (T) désigne la tangente en A à *(P)*.
- La droite (ƛ) passant par A et orthogonale à T s'appelle la normale en A à la parabole.
- Selon les lois de Descartes sur la réflexion , la demi-droite r' représentant le rayon réfléchi en A est la symétrique de r par rapport à la droite ƛ.
- On note D, C et E les points d'intersection respectifs des droites *(T)* et (ƛ), et de la demi-droite r' avec l'axe des ordonnées.



1. Pour étudier la position relative des points D, C et E, un élève a utilisé un logiciel de géométrie dynamique. Voici une copie d'écran des résultats obtenus pour différentes positions du point A. Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre ?



	A	B	C	D
1	x_A	y_C	y_D	y_E
2	-1.6	3.06	-2.56	0.25
3	-1.4	2.46	-1.96	0.25
4	-1.2	1.94	-1.44	0.25
5	-1	1.5	-1	0.25
6	-0.8	1.14	-0.64	0.25
7	-0.6	0.86	-0.36	0.25
8	-0.4	0.66	-0.16	0.25
9	-0.2	0.54	-0.04	0.25
10	0	?	0	?
11	0.2	0.54	-0.04	0.25
12	0.4	0.66	-0.16	0.25
13	0.6	0.86	-0.36	0.25
14	0.8	1.14	-0.64	0.25
15	1	1.5	-1	0.25
16	1.2	1.94	-1.44	0.25
17	1.4	2.46	-1.96	0.25
18	1.6	3.06	-2.56	0.25
19	1.8	3.74	-3.24	0.25
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				

2.

a) Déterminer la nature des triangles ACE et AED.
b) En déduire le lien géométrique existant entre les points C, E et D.
c) On note a l'abscisse du point A. Déterminer les coordonnées des points D et C en fonction de a.
d) Peut-on valider la conjecture émise précédemment ?

Partie 4 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$.

Dans cette partie n et m désignent deux entiers naturels non nuls distincts. On note N le point de la parabole (P) d'abscisse -n et M le point de la parabole (P) d'abscisse m.

1. Construire la droite (NM) pour différents couples (n,m).
2. En observant l'axe des ordonnées, quelle conjecture peut-on alors émettre ?
3. Pour tout couple (n,m) d'entiers naturels non nuls distincts, écrire une équation dépendant des entiers m et n de la droite (MN).
4. Conclure.
5. Déduire de ce qui précède une méthode graphique permettant de déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.